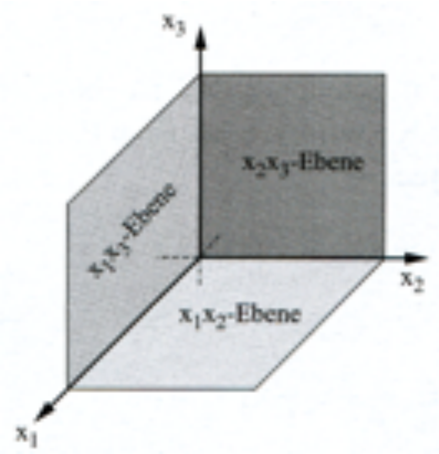
Besondere Ebenen

Lagebeziehung eines Punktes P bezüglich einer Ebene E:

Prüfen Sie, ob der Punkt P(-2/3/4) in der Ebene $E: 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5 = 0$ liegt.

$3 \cdot (-2) + 3 + 2 \cdot 4 - 5 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 \quad \Rightarrow P \in E$

(1) Koordinatenebenen:



Gleichung der x_1-x_2-Ebene in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

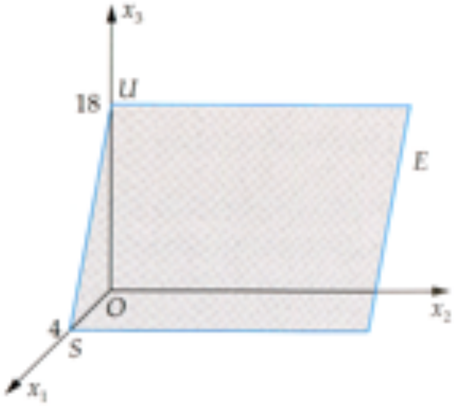
In Normalenform: $x_3 = 0$

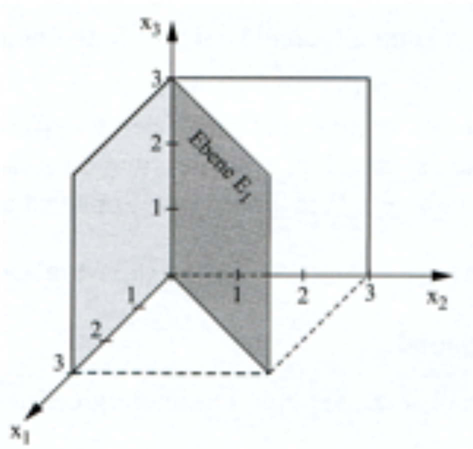
Analog erhält man:

x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$

x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$

(2) Ebene, die parallel zu einer Koordinatenachse liegen:





$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E_1: x_1 = x_2 \quad \Rightarrow E_1: x_1 - x_2 = 0$

E_1 enthält die x_3-Achse, da $n_0 = 0$

Analog erhält man:

$E_2: n_1 x_1 + n_3 x_3 = 0$ (enthält die x_2-Achse)

$E_3: n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0$ (enthält die x_1-Achse)

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E_1: 9x_1 + 2x_3 - 36 = 0$

E_1 parallel zur x_2-Achse, da $n_0 \neq 0$

Analog erhält man:

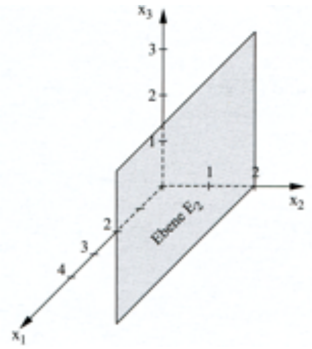
$E_2: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_0 = 0$ (parallel zur x_3-Achse)

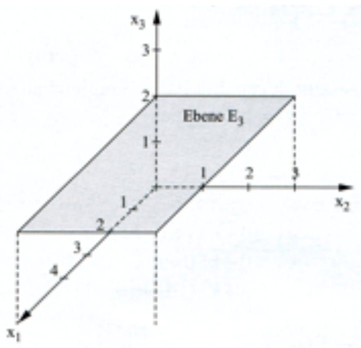
$E_3: n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$ (parallel zur x_1-Achse)

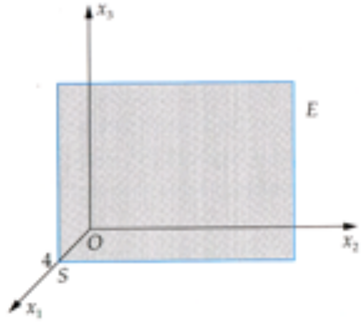
<u>Allgemein gilt:</u>

Tritt in der Normalenform einer Ebene E eine Koordinate nicht auf, dann liegt die Ebene E parallel zu dieser Koordinatenachse.

(3) Ebene, die parallel zu zwei Koordinatenachsen liegt:







$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In Normalenform:

$E: x_2 = 2 \quad \Rightarrow E: x_2 - 2 = 0 \qquad E: x_3 = 2 \quad \Rightarrow E: x_3 - 2 = 0 \qquad E: x_1 = 4 \quad \Rightarrow E: x_1 - 4 = 0$

Parallelebenen zu den Koordinatenebenen:

$E_1: x_1 = a_1$ (parallel zur x_2-x_3-Ebene) $\Rightarrow S(a_1/0/0)$

$E_2: x_2 = a_2$ (parallel zur x_1-x_3-Ebene) $\Rightarrow S(0/a_2/0)$

$E_3: x_3 = a_3$ (parallel zur x_1-x_2-Ebene) $\Rightarrow S(0/0/a_3)$

<u>Allgemein gilt:</u>

Treten in der Normalform einer Ebene E zwei Koordinaten nicht auf, dann liegt die Ebene E parallel zu der Ebene, die durch die Koordinatenachsen der fehlenden Koordinaten aufgespannt wird.

<u>Aufgabe:</u>

Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene E, die auf der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ senkrecht steht und den Punkt $P(7/p_2/p_3)$ der Geraden g

enthält.

Lösung:

Berechnung der fehlenden Koordinaten von P:

(I) $7 = 3 + 4s \quad \Rightarrow s = 1$

(II) $p_2 = 2 - 3s \quad \Rightarrow p_2 = -1$

(III) $p_3 = -1 + 5s \quad \Rightarrow p_3 = 4$

$\Rightarrow P(7 / -1 / 4)$

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$E: 4(x_1 - 7) - 3(x_2 + 1) + 5(x_3 - 4) = 0$

$E: 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 51 = 0$